Financiële vraagstukken onder onzekerheid

Out, B.

1981

FINANCIËLE VRAAGSTUKKEN ONDER ONZEKERHEID

B. Out

Researchmemorandum 1981-8, april '81

INHOUD pag.

Inleiding*

Wanneer een ondernemingsleiding een keuze moet maken uit een aantal verschillende projecten, dan zal zij zich rekenschap geven van het verwachte rendement en het risico van een project.
Waarbij wij met risico bedoelen: in hoeverre het ex-post gerealiseerde rendement zal afwijken van de verwachting.

Utiliteitstheorie geeft nu een mogelijke aanpak om dit risico te kwantificeren.
In deze memorandum zal alleen worden nagegaan hoe wij dat risico (lees ook wel: onzekerheid) kunnen kwantificeren als wij mogen aannemen dat de rendementen een bepaalde kansverdeling hebben. Wij spreken dan van objectieve waarschijnlijkheden van de rendementen. Dit in tegenstelling tot subjectieve waarschijnlijkheden, waarbij men de kansen niet kent en ze zelf toekent.

Wij zullen aantonen dat het maximaliseren van het verwacht nut een superieure maatstaf is, als gedragshypothese voor het handelen onder onzekerheid ingeval er sprake is van objectieve waarschijnlijkheden.
Daarnaast zullen verschillende nutsfuncties, die de risicohouding van een individu beschrijven, op hun merites worden onderzocht.
Tenslotte zal worden ingegaan op de paradoxen die kunnen ontstaan wanneer wij ons op de nutstheorie verlaten.

*) De auteur wil bij deze Prof. Wytzes danken voor de vele bruikbare suggesties. Niettemin blijven alle fouten en tekortkomingen voor rekening van de auteur.

§ 1. De St. Petersburg-paradox

De vraag luidt: "Hoe moet de onzekerheid bij investeringsprojecten worden weergegeven in de waardering van die projecten?"
Aannemende dat het mogelijk is een waarschijnlijkheidsverdeling van de uitkomsten op te stellen, zou men kunnen denken dat de verwachtingswaarde in guldens bepalend moet zijn. Deze verwachtingswaarde zou daarbij ook nog contant moeten worden gemaakt. Niettemin is deze verwachtingswaarde evenwel in vele gevallen niet relevant zoals de bekende St. Petersburg-paradox 'bewijst'. Deze paradox is afkomstig van Daniel Bernoulli[1] en luidt als volgt:

> Peter gooit net zo lang een geldstuk op tot kruis boven komt.
> Peter betaalt aan Paul 1 ducaat als dit bij de eerste worp het geval is. Als het bij de tweede worp gebeurt, betaalt Peter aan Paul 2 ducaten. Gebeurt het eerst bij de derde worp 4 ducaten, bij de vijfde worp 16 ducaten en bij de i^e worp 2^{i-1} ducaten.
> De verwachtingswaarde van dit spel voor Paul is
>
> $$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{2^{i-1}}{2^i} = \infty \quad .$$

Aangezien echter niemand een oneindig bedrag voor deze weddenschap over heeft als inzet, maar hoogstens 7 à 8 ducaten, heeft men de conclusie getrokken dat de verwachtingswaarde geen aanvaardbaar criterium is in situaties van onzekerheid zoals hier bedoeld.

Bernoulli lanceerde de gedachte, dat een beslissingnemer een nutsfunctie voor geld heeft die gekenmerkt wordt door een positieve eerste afgeleide en een negatieve tweede afgeleide: de bekende veronderstelling van het afnemend grensnut voor geld.
Wij merken op dat het nutsbegrip hier wordt toegepast op weddenschappen, waarbij geen tijdsverloop optreedt tussen inzet en uitkomst.
Meer in het bijzonder postuleerde Bernoulli de volgende nutsfunctie:

$$U(x) = b \log \frac{x}{a} \qquad (1.1)$$

waarbij $U(x)$:= de nutsfunctie van de opbrengst x
a, b := constant met $a > 0$, $b > 0$.

Iedere beslissingnemer moet zelf zijn waarden voor a en b invullen.
Deze nutsfunctie belichaamt de veronderstelling van afnemend grensnut.
Immers, daar a en b positief zijn, geldt:

$$U(x) \;=\; b \log x - b \log a \tag{1.2}$$

$$\Rightarrow U'(x) \;=\; b/x \Rightarrow U''(x) = -\, b/x^2 \;<\; 0 \;. \tag{1.3}$$

Het nut van Paul in de St. Petersburg-weddenschap is dan bij kruis in de x^e worp:

$$U(2^{x-1}) \;=\; b \log \frac{2^{x-1}}{a} \;=$$

$$= [(x-1) \log 2 - \log a] \tag{1.4}$$

Het verwachte nut van Paul van het spel is:

$$E\,[U(2^{x-1})] \;=\; \sum_{x=1}^{\infty} p(x)\, U(2^{x-1}) \;=\; \frac{1}{2^x} \tag{1.5}$$

waarbij $p(x)$:= de kans dat kruis bij de x^e worp voor het eerst optreedt. Ingevuld in formule (1.5) levert dit:

$$E\,[U(2^{x-1})] \;=\; \sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{2^x}\, b\, [(x-1) \log 2 - \log a] \;=$$

$$= b \sum_{x=1}^{\infty} \frac{(x-1)}{2^x} \log 2 - b \sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{2^x} \log a \tag{1.6}$$

Verder geldt dat:

$$\sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{2^x} \;=\; 1 \tag{1.7a}$$

en

$$\sum_{x=1}^{\infty} \frac{x-1}{2^x} \;=\; 1 \tag{1.7b}$$

<u>ad (1.7b)</u> Immers:

$$\sum_{x=1}^{\infty} \frac{x-1}{2^x} \;=\; \sum_{x=2}^{\infty} \frac{x-1}{2^x} \;=\; \frac{1}{4} + \frac{2}{8} + \frac{3}{16} + \frac{4}{32} + \ldots$$

Deze laatste formule kan als volgt uitgeschreven worden:

$$\begin{array}{rcl}
\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \ldots\ldots\ldots\ldots & = & \frac{1}{2} \\
\frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \ldots\ldots\ldots\ldots & = & \frac{1}{4} \\
\frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \ldots\ldots\ldots\ldots & = & \frac{1}{8} \\
\frac{1}{32} + \ldots\ldots\ldots\ldots & = & \frac{1}{16} \\
 & & \vdots \\
 & & \vdots \quad + \\
\hline
 & & 1
\end{array}$$

Dit alles volgt uit het feit dat:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \qquad (0 < x < 1) \quad .$$

Formule (1.6) wordt dan:

$$b \log (2) - b \log a = b \log \frac{2}{a} \tag{1.8}$$

Maar ook $U(2) = b \log \frac{2}{a}$, dus Paul kent even veel nut toe aan het direct verkrijgen van 2 ducaten als aan het spelen van het spel met Peter.

Onafhankelijk van Bernoulli ontwikkelde Cramer in dezelfde tijd ook een nutsfunctie om de beroemde paradox op te lossen.
Cramer gaf de nutsfunctie de volgende gedaante:

$$U(x) = \sqrt{x} \tag{1.9}$$

(Merk op, dat deze nutsfunctie voor iedereen gelijk is en dat $U''(x) < 0$).
Hieruit volgt voor Paul:

$$E\,[U(2^{x-1})] = \sum_{x=1}^{\infty} p(x)\, U(2^{x-1}) = \sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{2^x} \sqrt{2^{x-1}} =$$

$$= \tfrac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{2 - \sqrt{2}} \tag{1.10}$$

Maar ook $U(2.93) = (1.707) = \frac{1}{2 - \sqrt{2}}$ (1.11)

Dus Cramer kwam tot een nut van 2,93 ducaten.

Pas in 1934 demonstreerde Karl Menger[2] dat - tenzij men de nutsfunctie de beperking van begrensdheid oplegt - er weer nieuwe paradoxen kunnen worden geconstrueerd.
Een voorbeeld hiervan bij gebruik van Bernoulli's nutsfunctie is hetzelfde spel, maar nu met een vergoeding van e^{2^x} wanneer in de x^e worp voor het eerst kruis valt. Immers, dan wordt:

$$U\left(e^{2^x}\right) = b \log \frac{e^{2^x}}{a} = b\,2^x - b \log a \qquad (1.12)$$

Daaruit volgt:

$$E\left[U\left(e^{2^x}\right)\right] = \sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{2^x}\left[b\,2^x - b \log a\right] =$$

$$= \sum_{x=1}^{\infty} b - b \log a = \infty \qquad (1.13)$$

<u>Conclusie</u>: De nutsfunctie dient begrensd te zijn.

Het nutsbegrip werd ingevoerd omdat bleek dat de verwachtingswaarde in geldeenheden niet overeenkwam met de waarde die een beslissingsnemer aan een onzeker vooruitzicht toekent.
In onderstaande situatie is dat nog eens intuïtief duidelijk.
Neem aan dat iemand mag kiezen tussen het met stelligheid ontvangen van ƒ 1 miljoen gulden enerzijds tegenover anderzijds een weddenschap, waarbij er een kans van 50% is dat hij niets ontvangt en eveneens een kans van 50% dat hij ƒ 3 miljoen ontvangt. Nagenoeg iedereen zal de voorkeur geven aan de stellige ontvangst van ƒ 1 miljoen, ook al is de verwachtingswaarde van de weddenschap hoger.

De conclusie wordt getrokken dat een beslissingnemer niet waardeert naar de verwachtingswaarde in guldens, maar naar een <u>verwacht nut</u>. En gegeven de risico-aversie is dat verwachte nut geringer dan de verwachtingswaarde in guldens. Anders gezegd: het grensnut van geld neemt af; de tweede afgeleide van de nutsfunctie voor geld is negatief.
De vraag of deze theorie normatief is dan wel descriptief laten wij nu maar rusten. Het is wel duidelijk, dat iedere beslissingnemer een eigen nutsfunctie kan vormen in de zin dat hij zelf de constanten daarin bepaalt.
Het nut wordt voorts gemeten op een interval-schaal. Onderlinge vergelijking tussen beslissingnemers van het nut dat zij aan een onzekere uitkomst toekennen, is dus onmogelijk.

§ 2. Het verloop van de nutsfunctie

De vraag die we nu aan de orde willen stellen is: "Hoe bepaalt een individu zijn nutsfunctie?" Men hanteert hierbij de loterij-methode. In het kort komt het hierop neer, dat wanneer men moet kiezen tussen een aantal projecten met ieder op zich een aantal mogelijke rendementen, dan moet men deze rendementen allemaal rangschikken van laag naar hoog. Aan het laagst mogelijke rendement kent men het nut 0 toe en aan het hoogst mogelijke rendement nut 1 [3].

Het nut van een rendement tussen 0 en 1 gelegen bepaalt men als volgt: Stel, de beslisser heeft de keuze uit de volgende twee mogelijkheden:

a. de beslisser krijgt direct het desbetreffende rendement

b. hij speelt een kansspel waarbij deze beslisser met kans p het hoogst mogelijke rendement (nut 1) krijgt en kans (1-p) het laagst mogelijke rendement (nut 0).

De beslisser kijkt nu voor welke waarde van p hij indifferent is tussen deze twee mogelijkheden. Het nut van rendement x is dan gelijk aan p . Zo handelt de beslisser voor alle mogelijke rendementen x [4].
De gevonden nutswaarden kunnen worden uitgezet in een grafiek met op de horizontale as de mogelijke opbrengsten of rendementen en op de vertikale as het nut. Door deze punten trekt men dan een lijn, die de nutscurve wordt genoemd.
Nu kan men ook voor andere mogelijke uitkomsten het bijbehorend nut vinden.

Een probleem dat bij het opstellen van nutsfuncties kan ontstaan is, dat mensen niet altijd consistent handelen. Wij geven het volgende voorbeeld: Allais[5] vroeg aan verschillende subjecten de volgende twee alternatieven te beschouwen:

alternatief A :	ontvang	1 mln	met zekerheid	
alternatief B :	ontvang	5 mln	met kans	0,1
	ontvang	1 mln	met kans	0,89
	ontvang	niets	met kans	0,01

Uit zijn ondervragingen bleek dat bijna alle personen alternatief A prefereerden boven B.

Vervolgens vroeg hij hen de volgende twee situaties te beschouwen:

situatie C :	ontvang 1 mln	met kans	0,11
	ontvang niets	met kans	0,89
situatie D :	ontvang 5 mln	met kans	0,10
	ontvang niets	met kans	0,90

Hier bleek, dat de proefpersonen van Allais situatie D prefereerden boven C.

Als wij nu veronderstellen dat de kansen van de uitkomsten van belang zijn en niet de wijze waarop ze gegenereerd worden[6], dan is A boven B en D boven C kiezen een contradictie met het verwachte nutkriterium.
Dit is als volgt in te zien:
Laat $U(0)$, $U(1)$, $U(5)$ het nut representeren van respectievelijk niets ontvangen, 1 mln en 5 mln. Daar A geprefereerd wordt boven B geldt:

$$U(1) > 0{,}1\ U(5) + 0{,}89\ U(1) + 0{,}01\ U(0) \quad .$$

Tel hier links en rechts van het 'groter dan' teken $[0{,}89\ U(0) - 0{,}89\ U(1)]$ bij op. Dan geldt:

$$0{,}11\ U(1) + 0{,}89\ U(0) > 0{,}1\ U(5) + 0{,}9\ U(0) \ .$$

Dus als een individu A boven B prefereert, dan moet dit subject ook C boven D prefereren.

Markowitz[7] toont op een excellente wijze aan dat als een individu het kriterium accepteert, dat alleen de kansen van belang zijn, er waarschijnlijk sprake is van een inconsistent gedrag.
Toch is het laatste woord over deze beroemd geworden Allais-paradox nog niet gesproken. (Zie ook de recentelijke publicatie van Allais en Hagen[8]).

Het verloop van de curve wordt volledig bepaald door de beslisser.
Er zijn drie hoofdvormen te onderscheiden:

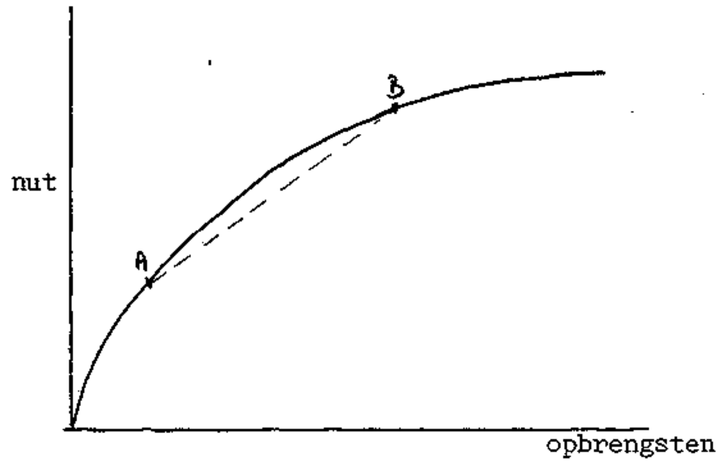
1. concave nutscurves
2. convexe nutscurves
3. lineaire nutscurves

ad 1. Een nutsfunctie is concaaf wanneer voor elk tweetal mogelijke waarden x_1 en x_2 en alle $0 < \alpha < 1$ geldt dat:

$$U\ [\alpha\ x_1 + (1-\alpha)\ x_2] > \alpha U(x_1) + (1-\alpha)\ U(x_2) \qquad (2.1)$$

Grafisch betekent dit, dat de verbindingslijn tussen elk tweetal punten van de grafiek onder de curve ligt.

De vorm van een concave nutsfunctie is als volgt:



Ter illustratie van de concaviteit zijn de willekeurige punten A en B met elkaar verbonden. Overduidelijk blijkt dat de verbindingslijn er onder loopt.

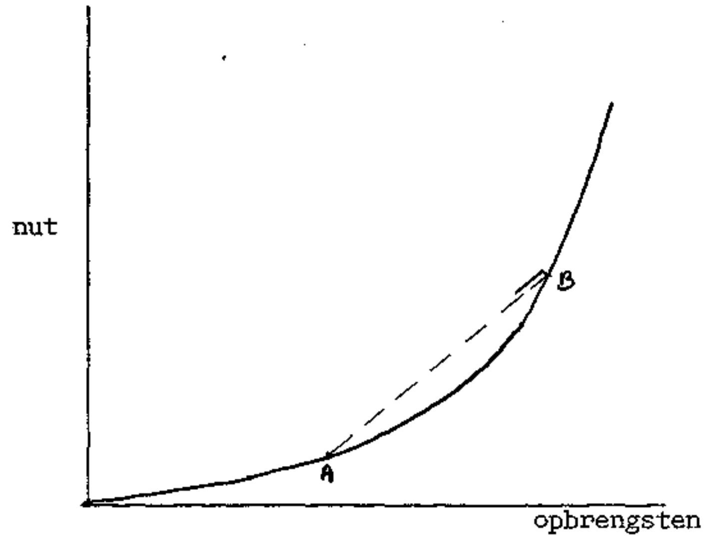
In het geval van concave nutsfuncties hebben we altijd te maken met risico-averse beslissers. Immers voor een risico-averse beslisser zal een mogelijk verlies Y zwaarder wegen dan dezelfde mogelijke winst Y. Dit heeft als consequentie dat een zelfde toename in de opbrengsten een steeds kleiner wordende toename in het nut met zich meebrengt van laag naar hoog gaande.
Mathematisch betekent dit dat de tweede afgeleide van de nutsfunctie kleiner dan nul is. Aangezien bij een nutsfunctie de eerste afgeleide altijd positief is, omdat extra opbrengst extra nut met zich meebrengt, is er dus sprake van een concave functie.

ad 2. Een nutsfunctie is convex wanneer voor elk paar mogelijke waarden x_1 en x_2 en alle $0 < \alpha < 1$ geldt:

$$U[\alpha x_1 + (1-\alpha)\, x_2] \leq \alpha U(x_1) + (1-\alpha) U(x_2) \qquad (2.2)$$

Grafisch betekent dit dat de verbindingslijn tussen twee willekeurige punten op de curve altijd bovende grafiek ligt.

De vorm van een convexe nutsfunctie is als volgt:



In het geval van convexe nutsfuncties hebben we te maken met risico-liefhebbers. De tweede afgeleide van de nutsfunctie is in dit geval positief.

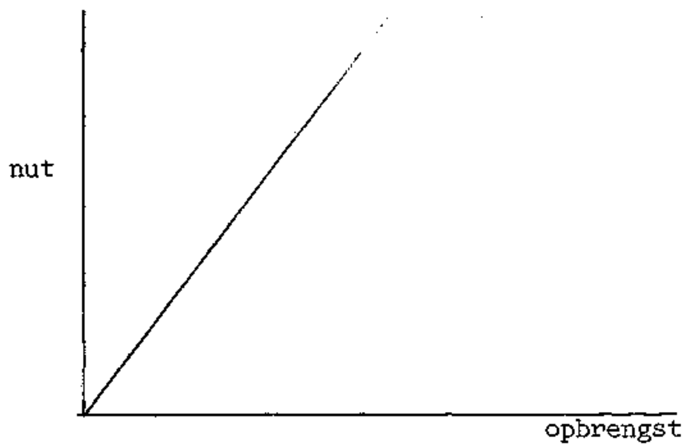
ad 3. Een nutsfunctie is lineair als voor alle x geldt:

$$U(x) = a\,x + b \qquad (2.3)$$

waarbij $U(x)$:= het nut van opbrengst x

a en b constanten, waarbij $a > 0$.

Grafisch betekent dit dat de grafiek een rechte lijn is, zoals in het plaatje wordt geïllustreerd.



Hier hebben we dus te maken met een risico-indifferent persoon. Zijn nut neemt namelijk lineair toe met de opbrengst.
Mathematisch betekent dit dat de tweede afgeleide gelijk is aan nul.

§ 3. De nutsfunctie in functionele vorm

In de vorige paragraaf hebben wij geconstateerd hoe het verloop van de nutsfunctie kan zijn. In deze paragraaf willen wij bekijken of dit verloop in een functioneel verband is weer te geven, waarbij U te schrijven is als een functie van het rendement. Hierbij moet wel worden benadrukt, dat het opstellen van de nutsfunctie altijd pas geschiedt nadat het individu zijn nutsvoorkeur heeft uitgesproken. Dit gebeurt door de punten die het individu heeft aangegeven onderling te verbinden en dan de functie te zoeken die de gevonden grafiek beschrijft.

De hierna geldende nutsfuncties zijn niet lineair en gelden voor risico-mijders en -zoekers.
De mogelijkheden voor het specificeren van de nutsfunctie zijn zeer talrijk. In de literatuur komen bepaalde nutsfuncties naar voren. Populair zijn onder andere de nutsfuncties van de volgende vorm:

$$U(r) = a + br + cr^2 \quad , \tag{3.1}$$

de zogenaamde kwadratische nutsfuncties.
Bij een dergelijke nutsfunctie worden de derde en hogere momenten van de verdelingsfunctie van het rendement niet in de waardering betrokken. Met andere woorden: de beslisser beschouwt alleen het verwachte rendement en de standaardafwijking van het rendement (zie ook § 5).
Uitgaande van risico-aversie komen wij tot de volgende voorwaarden voor b en c. De eerste afgeleide moet positief zijn:

$$U^{(1)}(r) = b + 2cr > 0 \tag{3.2}$$

De tweede afgeleide moet negatief zijn:

$$U^{(2)}(r) = 2c < 0 \tag{3.3}$$

Dit impliceert dat:

$$c < 0 \quad \text{en} \quad -\frac{b}{2c} > r \tag{3.4}$$

Dit heeft tot gevolg dat we de kwadratische nutsfunctie niet verder kunnen bekijken dan het punt $r = -\frac{b}{2c}$. Anders zou namelijk het nut gaan dalen bij een hogere opbrengst.
Zie voor een merkwaardig aspect paragraaf 5.

Niet alleen de kwadratische nutsfunctie wordt algemeen als een redelijke nutsfunctie beschouwd, maar ook wortelfuncties en de logaritmische functies worden wel gebruikt.

Stel:

$$U(r) = a\sqrt{r} + b \tag{3.5}$$

Dan moet voor een risico-averse beslisser gelden:

$$U^{(1)}(r) = \frac{a}{2\sqrt{r}} > 0 \tag{3.6}$$

en:

$$U^{(2)}(r) = \frac{-a}{4r\sqrt{r}} < 0 \tag{3.7}$$

Deze nutsfunctie kan alleen gebruikt worden bij positieve rendementen. Dit is duidelijk een beperking. Uit (3.6) volgt bovendien dat de a positief dient te zijn, uitgaande van een risico-averse persoon.

Wat betreft de logaritmische functie, stel:

$$U(r) = \log\left(1 + \frac{r}{a}\right) \tag{3.8}$$

Dan moet voor een risico-averse beslisser gelden:

$$U^{(1)}(r) = \frac{1}{1 + \frac{r}{a}} \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a + r} > 0 \tag{3.9}$$

zodat $a > -r$ moet zijn.

Tevens moet:

$$U^{(2)}(r) = \frac{-1}{(a + r)^2} < 0 \quad \text{zijn.} \tag{3.10}$$

Dit geldt echter altijd.

Natuurlijk zijn er naast deze drie veel gebruikte nutsfuncties nog vele andere variaties, zoals de derdegraads nutsfunctie.

Wij zullen nu m.b.v. Taylorreeksen laten zien dat al deze nutsfuncties zijn te benaderen door polynomen met als variabele het rendement.

De stelling van Taylor komt in het kort hierop neer, dat een differentieerbare functie $f(x)$ te benaderen valt door zijn Taylorreeks[9]. In formule:

$$f(x) = f(h) + \frac{f^{(1)}(h).(x-h)}{1!} + \frac{f^{(2)}(h).(x-h)^2}{2!} + \\ + \frac{f^{(3)}(h).(x-h)^3}{3!} + \dots \tag{3.11}$$

waarbij h een vast gekozen punt is uit het domein van de functie en

$$f^{(i)}(h) = \left.\frac{d^i f(x)}{d x^i}\right|_{x=h} \tag{3.12}$$

Op deze manier kan elke willekeurige functie meestal worden benaderd m.b.v. een polynoom in een bepaald gebied. En dat geldt dus ook voor de nutsfuncties die wij hiervoor hebben beschreven. De kwadratische nutsfunctie is natuurlijk al een polynoom (van de graad 2) en de wortelfunctie en de logaritmische functie kunnen als volgt als een polynoom geschreven worden:

Als $U(r) = \sqrt{r}$, kies dan $h = 1$, dan geldt voor $0 < r < 1$:

$$\sqrt{r} \;=\; 1 + \tfrac{1}{2}(r-1) - \tfrac{1}{4}\,\frac{(r-1)^2}{2!} + \frac{3}{8}\,\frac{(r-1)^3}{3!} - \frac{15}{16}\,\frac{(r-1)^4}{4!} + \ldots \quad (3.13)$$

en wanneer $U(r) = \log\,(1 + \frac{r}{a})$, kies dan $h = 0$ en dan geldt voor $-1 < \frac{r}{a} \leq 1$:

$$\log\,(1 + \frac{r}{a}) \;=\; \frac{r}{a} - \frac{r^2}{2a^2} + \frac{r^3}{3a^3} - \frac{r^4}{4a^4} + \frac{r^5}{5a^5} - \ldots \quad (3.14)$$

De algemene gedaante van de nutsfunctie kunnen we als volgt herschrijven:

$$U(r) = U(h) + U^{(1)}(h)(r-h) + U^{(2)}(h)\frac{(r-h)^2}{2!} + U^{(3)}(h)\frac{(r-h)^3}{3!} + \ldots \quad (3.15)$$

Aangezien de afgeleiden in het punt h alle constanten zijn, kunnen we ze in formule (3.15) ook schrijven met behulp van a_0 , a_1 , ...
(3.15) wordt dan:

$$U(r) \;=\; a_0 + a_1(r-h) + a_2(r-h)^2 + a_3(r-h)^3 + \ldots \quad (3.16)$$

waarbij:

$$a_0 = U(h)$$
$$a_1 = U^{(1)}(h)$$
$$a_2 = \frac{U^{(2)}(h)}{2!}$$

etc.

Voor h mogen wij elk getal uit het domein van de nutsfunctie invullen dat wij willen, mits de reeks maar blijft convergeren. De verwachting van het rendement ligt ook in dat domein. En $h = E(r)$ ingevuld levert:

$$U(r) = a_0 + a_1\{r - E(r)\} + a_2\{r - E(r)\}^2 + a_3\{r - E(r)\}^3 + \ldots \quad (3.17)$$

Wanneer we vervolgens het verwachte nut willen bepalen ontstaat de volgende formule:

$$E\,[U(r)] = a_0 + E\,[a_1\{r-E(r)\}] + E\,[a_2\{r-E(r)\}^2] + $$

$$+ E\,[a_3\{r-E(r)\}^3] + \ldots =$$

$$= a_0 + a_1 E\,[r-E(r)] + a_2 E\,[\{r-E(r)\}^2] +$$

$$+ a_3 E\,[\{r-E(r)\}^3] + \ldots \qquad (3.18)$$

En hieruit kan de zeer belangwekkende conclusie worden getrokken dat het verwachte nut te schrijven is als functie van de momenten van de verdeling van het rendement. Aangezien elke verdelingsfunctie juist geheel wordt gekarakteriseerd door haar momenten, komt in dit verwachte nut dan ook precies het karakter van de rendementsverdeling tot uiting. En omdat de verdeling van het rendement nu precies is wat de investeerder/beslisser interesseert, lijkt het plausibel het verwachte nut als criterium te gaan gebruiken wanneer gekozen dient te worden uit verschillende investeringsprojecten.
In de volgende paragraaf gaan wij nader op de keuze van dit kriterium in.

§ 4. Het verwacht nut als criterium

In paragraaf 2 hebben wij het verloop van de nutsfunctie geschetst. De vraag die wij nu aan de orde willen stellen is: "Op grond van welk criterium moet de beslisser zijn keus tussen verschillende projecten maken?"
Wij nemen aan dat bij een keus uit alternatieven iedereen zijn verwacht nut wil maximaliseren. Echter, het nut van een bepaald project staat nooit bij voorbaat volkomen vast. De opbrengsten zijn immers onzeker en daarmee dus ook het daarbij behorende nut. Hierdoor kunnen wij niet zomaar een optimale keuze maken.
Von Neumann en Morgenstern toonden aan dat wanneer een beslisser rationeel handelt en zijn nutsfunctie voldoet aan een aantal axioma's deze de optimale beslissing neemt wanneer hij het project kiest dat zijn verwachte nut maximaliseert. Zij redeneren als volgt:
Wanneer een individu een keuze moet maken uit drie alternatieve loterijen A, B en C, dan zal zijn optimale beslissing bepaald worden door die loterij welke zijn verwacht nut maximaliseert, mits voldaan wordt aan de hieronderstaande axioma's[10].

Axioma 1: Elke twee alternatieven zijn vergelijkbaar, d.w.z. òf het individu prefereert het ene alternatief boven het andere, òf hij is indifferent tussen de twee alternatieven.

Axioma 2: Zowel de indifferentie-als preferentie-relaties zijn transitief, d.w.z. als $A \succ B$ en $B \succ C$, dan is $A \succ C$, waarbij $\succ$ wil zeggen "wordt geprefereerd boven" .

Axioma 3: Wanneer een loterij als één van zijn prijzen een andere loterij heeft, is de eerste loterij op te delen in de alternatieven van de tweede loterij.

Axioma 4: Als een individu indifferent is tussen twee loterijen, dan zijn deze twee onderling verwisselbaar als alternatieven binnen elke samengestelde loterij.

Axioma 5: (Monotoniciteit)Wanneer twee loterijen dezelfde twee alternatieven bevatten, dan wordt die loterij geprefereerd waarin het meest gewaardeerde alternatief de grootste kans van voorkomen heeft.

Axioma 6. (Continuïteit). Wanneer $A \succ B$ en $B \succ C$, dan is er een loterij met als mogelijke uitkomsten A en C die indifferent is met B.

Wanneer een beslisser nu voldoet aan de hierboven genoemde axioma's zal hij zijn beslissingen nemen volgens het maximum verwacht nut criterium. Om dit te bewijzen veronderstellen wij dat een beslisser de keuze heeft uit de volgende twee loterijen:

$$\left.\begin{aligned} L_1 &= (p_1A_1,\ p_2A_2,\ \ldots,\ p_nA_n) \\ L_2 &= (q_1A_1,\ q_2A_2,\ \ldots,\ q_nA_n) \end{aligned}\right\} \qquad (4.1)$$

waarbij

A_i := de mogelijke opbrengst

p_i := de kans op opbrengst A_i bij loterij 1 en $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$

q_i := de kans op opbrengst A_i bij loterij 2 en $\sum_{i=1}^{n} q_i = 1$.

Zonder verlies der algemeenheid kunnen we veronderstellen (eventueel na hernummeren) dat:

$$A_1 \succ A_2 \succ A_3 \succ \ldots \succ A_n \qquad (4.2)$$

Gebruik makend van axioma 6 kunnen wij voor elke opbrengst A_i een loterij A_i^* vinden, zodanig dat de beslisser indifferent zal zijn tussen A_i en A_i^* .

In formule:

$$A_i \sim [u_iA_1, (1-u_i)A_n] \equiv A_i^* \qquad (i = 2, \ldots, n-1) \qquad (4.3)$$

waarbij $\sim$:= equivalent

u_i := een getal tussen 0 en 1 .

Het is duidelijk dat wanneer $A_i \succ A_j$ zal gelden $u_i > u_j$.
Vanwege deze relatie kunnen we aan iedere A_i^* de volgende waarden toekennen:

$$u(A_1) = u_1 = 1$$

$$u(A_i) = u_i \quad \text{waarbij } 0 < u_i < 1 \text{ voor } i = 2 \ldots n-1 .$$

$$u(A_n) = u_n = 0 .$$

Volgens axioma 4 kunnen we in L_1 en L_2 net zo lang de A_i vervangen door A_i^* , totdat wij kunnen schrijven:

$$L_1 = (p_1A_1^*, p_2A_2^*, \ldots, p_nA_n^*) \qquad (4.4)$$

$$L_2 = (q_1A_1^*, q_2A_2^*, \ldots, q_nA_n^*) \qquad (4.5)$$

Met behulp van axioma 3 gaan wij dit als volgt herschijven:

$$\begin{aligned} L_1 &= \{p_1A_1^*, p_2A_2^*, \ldots, p_nA_n^*\} \\ &= \{p_1[u_1A_1, (1-u_1)A_n], p_2[u_2A_1, (1-u_2)A_n], \ldots \\ &\qquad \ldots, p_n[u_nA_1, (1-u_n)A_n]\} = \\ &= \{p_1u_1A_1, p_1(1-u_1A_n), p_2u_2A_1, p_2(1-u_2)A_n, \ldots \\ &\qquad \ldots, p_nu_nA_1, p_n(1-u_n)A_n\} = \\ &= \left\{\sum_{i=1}^{n} p_iu_iA_1 , \sum_{i=1}^{n} p_i(1-u_i)A_n\right\} = \\ &= \left\{A_1 \sum_{i=1}^{n} p_iu_i , A_n\left(\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{i=1}^{n} p_iu_i\right)\right\} = \\ &= \{\bar{p}A_1, (1-\bar{p})A_n\} \end{aligned} \qquad (4.6)$$

waarbij $\bar{p} = \sum_{i=1}^{n} p_i u_i$ (4.7)

Op dezelfde wijze kan men afleiden dat

$$L_2 = \{\bar{q}A_1\,, (1-\bar{q})\,A_n\} \tag{4.8}$$

$$\bar{q} = \sum_{i=1}^{n} q_i\, u_i \tag{4.9}$$

Aangezien $A_1 \gtrless A_2$ geldt volgens axioma 5 dat $L_1 \gtrless L_2$ dan en slechts dan als $\bar{p} > \bar{q}$. Wanneer we nu de u_i beschouwen als het nut van opbrengst A_i dan zijn $\bar{p}$ en $\bar{q}$ nu juist het verwachte nut van respectievelijk L_1 en L_2.
D.w.z.:

$$\boxed{L_1 \gtrless L_2 \iff E\,u(L_1) > E\,u(L_2)} \tag{4.10}$$

Aldus is uitgaande van de 6 axioma's van Von Neumann en Morgenstern bewezen, dat het maximale verwachte nut een voldoende criterium is bij beslissingen met betrekking tot keuzes uit meerdere projecten met onzekere opbrengsten.

Wanneer niet aan deze 6 axioma's is voldaan dan is het niet altijd voldoende alleen te kijken naar het verwachte nut van de verschillende projecten. Echter de veronderstellingen die Von Neumann en Morgenstern maken zijn reëel en om op verdere oplossingen in te gaan zou te ver voeren, dus laten wij het bij de vermelding dat er in de literatuur nog vele andere schrijvers zijn, die ieder weer hun eigen criterium naar voren brengen, terwijl de theorie van Von Neumann en Morgenstern vrij algemeen aanvaard wordt.

§ 5. Indifferentiecurven

Definitie: Een indifferentiecurve is een verzameling punten die eenzelfde verwacht nut opleveren.

De vorm van de indifferentiecurve hangt af van de houding van de beslisser. Deze houding kan zoals wij zagen risicomijdend, risiconeutraal, maar ook risicozoekend zijn.

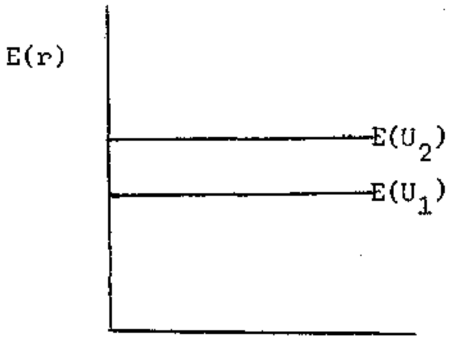


fig.(1) σ(r)

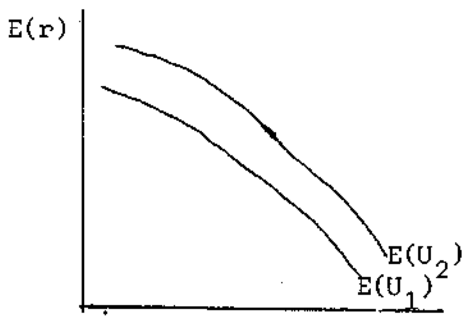


fig.(2) σ(r)

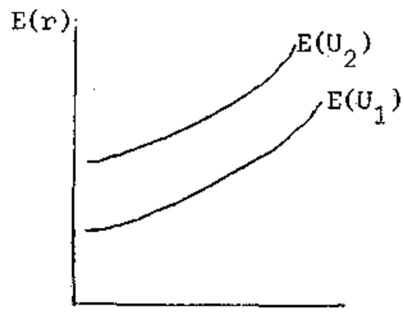


fig.(3) σ(r)

Figuur (1) geeft een tweetal indifferentiecurven van een risico indifferente beslisser, figuur (2) van een risicozoeker en figuur (3) van een risicomijder.

De opmerkzame lezer zal zich er enigszins over verbazen dat het verwachte nut door de eerste twee centrale momenten te beschrijven is, daar wij in § 4 hadden afgeleid dat:

$$E\,[U(r)] = a_0 + a_1 E\,[r - E(r)] + a_2 E\,[\{r - E(r)\}^2] + a_3 E\,[\{r - E(r)\}^3] + \ldots \qquad (5.1)$$

Om dit probleem op te lossen moeten wij een koppeling maken met de portefeuilletheorie. In de portefeuilletheorie wordt namelijk verondersteld, dat de verdeling van de rendementen volledig te beschrijven is door de normale verdeling[11].

Dit houdt in dat de verdeling gekarakteriseerd wordt door het verwachte rendement en de standaarddeviatie van de rendementen.

In formule:

$$E\,[U(r)] = b_0 + b_1 E\,[r] + b_2 E\,[r - E(r)]^2 \qquad (5.2)$$

Wij zullen de indifferentiecurve afleiden voor een risico-averse beslisser met een kwadratische nutsfunctie.

Zij

$$U(r) = a + br + cr^2 \tag{5.3}$$

met a, b, c positieve constanten.

Dan geldt:

$$E\,[U(r)] = E\,[a + br + cr^2] = a + b\,E(r) + c\,E(r^2) \tag{5.4}$$

Daar

$$\sigma^2(r) = E\,r^2 - (Er)^2 \tag{5.5}$$

geldt:

$$E\,[U(r)] = a + b\,E(r) + c\,[E(r)]^2 + c\,\sigma^2(r) \tag{5.6}$$

Herschrijven van deze laatste formule geeft:

$$\left(E(r) + \frac{b}{2c}\right)^2 + \sigma^2(r) = \frac{-a + E\,[U(r)]}{c} + \frac{b^2}{4c^2} \tag{5.7}$$

Voor vaste waarden van $E\,[U(r)]$ is formule (5.1) een set van cirkels met middelpunt

$$\left(0\,, \frac{b}{2c}\right) .$$

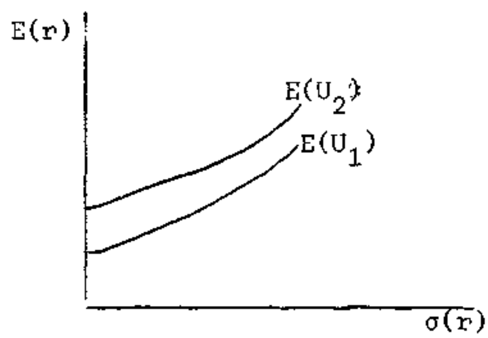
Er geldt:

$$\frac{d\ U(r)}{d\ r} = b + 2cr > 0 \Rightarrow r < \frac{-b}{2c} \tag{5.8}$$

en voor een risico-averse beslisser moet tevens gelden:

$$\frac{d\,U'(r)}{d\ r} = 2c < 0 \Rightarrow c < 0 \tag{5.9}$$

zodat niet de gehele cirkel in de beschouwing wordt genomen.



Een gevolg van deze indifferentiecurven behorende bij de kwadratische nutsfuncties is dat een beslissingnemer minder en minder bereid is om meer risico te aanvaarden naarmate de rendementen toenemen. Wij zullen dit illustreren aan de hand van een voorbeeld.*

*) Dank is verschuldigd aan drs. L.J.de Man voor verheldering op dit punt.

Veronderstel, dat een beslisser een kwadratische nutsfunctie heeft met $a = 0$; $b = 1$; $c = -0{,}05$, dan is $\frac{-b}{2c} = 10$, zodat $r \leq 10$ is.
In onderstaande tabel zijn een aantal mogelijke rendementen opgenomen met het daarbij behorende nut.

r	1	2	3	8	9	10
U(r)	0,95	1,8	2,55	4,8	4,95	5

De absolute verhouding van de verschillen in utiliteit van 1 naar 2 en van 2 naar 3 is:

$$\frac{0{,}85}{0{,}75} = 1{,}13$$

en van 8 naar 9 en 9 naar 10

$$\frac{0{,}15}{0{,}05} = 3 \quad .$$

Dit houdt in dat een daling van 1 eenheid rendement bij 9 driemaal zo erg is als een stijging.
We zien uit deze verhoudingscijfers dat een verlies van 1 bij een rendement van 9 zwaarder weegt dan een verlies van 1 bij een rendement van 2 ten opzichte van een stijging van 1, d.w.z. dat er sprake van toenemende risico-aversie is.

Was de nutsfunctie van de beslisser nu bijvoorbeeld een wortelfunctie, zeg $U(r) = \sqrt{r}$ en gaan wij uit van onderstaande tabel

r	5	10	15	20	25	30
U(r)	2,2361	3,1623	3,8730	4,4721	5	5,4772

dan is de verhouding van de verschillen in utiliteit van 5 naar 10 en van 10 naar 15 gelijk aan:

$$\frac{0{,}9262}{0{,}7107} = 1{,}3032 \quad .$$

De absolute verhouding in verschillen van de utiliteit van 20 naar 25 en van 25 naar 30 is:

$$\frac{0{,}5273}{0{,}4772} = 1{,}1062 \quad .$$

Wij zien dat de beslisser een verlies van 5 bij een rendement van 25 dit minder erg vindt dan een verlies van 5 bij een rendement van 10 ten opzichte van een stijging van 5 , zodat er sprake is van een daling in de risico-aversie bij een toenemend rendement.
Wij komen hier in de volgende paragraaf op terug.

Wij willen de lezer er op attent maken dat als de nutsfunctie van de beslissingnemer kwadratisch is, het er niet toe doet hoe de rendementen verdeeld zijn, zodat toch de indifferentiecurve als functie van het verwachte rendement en de standaardafwijkingen kan worden geschreven. Wij tonen dit als volgt aan. Volgens formule (5.6) geldt:

$$E\,[U(r)] \;=\; a + b\,E(r) + c\,[E(r)]^2 + c\,\sigma^2(r)$$

en volgens formule (5.3) geldt dat:

$$U\,[E(r)] \;=\; a + b\,E(r) + c\,[E(r)]^2 \quad ,$$

zodat $$E\,[U(r)] \;=\; U\,[E(r)] + c\,\sigma^2(r) \quad . \qquad (5.10)$$

Uit formule (5.10) zien wij dat $E\,[U(r)]$ volledig te beschrijven is door $\sigma^2(r)$ en $E(r)$ zonder een veronderstelling te doen over de rendementen.

Tenslotte merken wij op, dat als de nutsfunctie van de 3e graad of hoger is en de rendementen niet normaal verdeeld zijn, dan is in ieder geval een derde criterium nodig; zeg bijvoorbeeld de scheefheid van de verdeling. De indifferentiecurve wordt dan bepaald door de punten

$$\left(E(r)\,,\ \sigma^2(r)\,,\ E(Er - r)^3\right) \quad ,$$

die allen eenzelfde verwacht nut opleveren en dit geeft dan een vlak in R^3 .

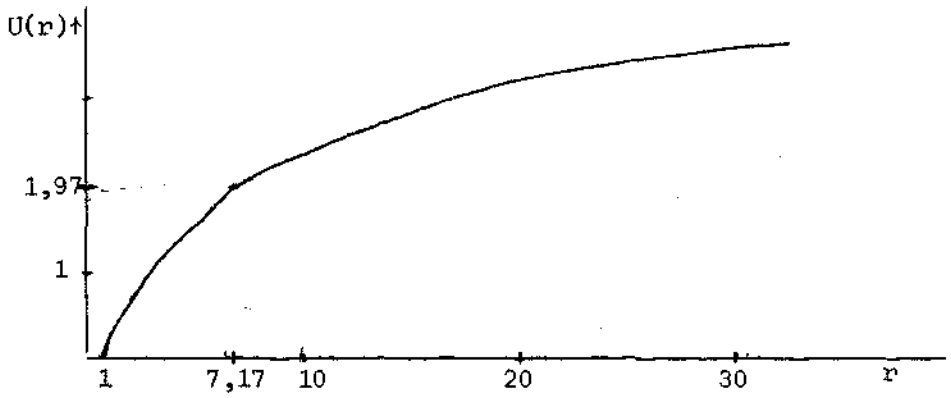
§ 6. Risicopremies

6.1. De Markowitz-risicopremie

Het is mogelijk om na te gaan hoeveel een belissingnemer er voor over heeft om aan een project deel te nemen. Dit bedrag noemen wij het zekerheidsequivalent. Het verschil tussen de verwachte waarde en het zekerheidsequivalent wordt de risicopremie van een project genoemd. Wij illustreren dit aan de hand van een voorbeeld.

Veronderstel dat de nutscurve van de beslissingnemer in onze beschouwing een logaritmische functie is, zeg:

$$U(r) = \log(r) \tag{6.1}$$



r	1	5	10	20	30
log r	0	1,61	2,30	3,00	3,40

Deze beslisser heeft een project geëntameerd met een kans van 0,8 op een winst van 5 geldstukken en een kans van 0,2 op een winst van 30 dezelfde geldeenheden. De verwachte monetaire opbrengst van dit project is dus in guldens:

$$E(r) = 0{,}8 \,.\, 5 + 0{,}2 \,.\, 30 = 10 \,.$$

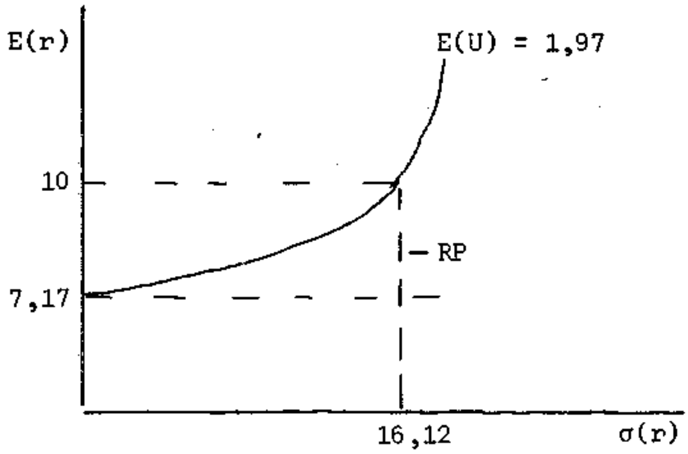
Het verwachte nut is:

$$E(U) = 0{,}8\ U(5) + 0{,}2\ U(30) =$$

$$= 0{,}8 \,.\, (1{,}61) + 0{,}2 \,.\, (3{,}40) = 1{,}97 \,.$$

We zien uit de grafiek dat bij een utiliteit van 1,97 een bedrag van 7,17 geldstukken behoort. Aan de andere kant verwacht deze beslisser een opbrengst van 10 geldstukken, zodat gegeven deze logaritmische functie deze beslissingnemer er 10 - 7,17 = 2,83 geldstukken voor over heeft om het risico van dit project te vermijden en met zekerheid het bedrag van 7,17 te ontvangen.

We kunnen deze risicopremie ook nog op een andere manier interpreteren. Uit de indifferentiecurve blijkt dat er een oneindig aantal projecten mogelijk zijn die een verwacht nut hebben van 1,97 .



$$\sigma^2(r) = 0{,}8\ (5-10)^2 + 0{,}2\ (30-10)^2 = 0{,}8 \cdot 225 + 0{,}2 \cdot 400 =$$
$$= 260 \ .$$

Wij zien hieruit dat de risicopremie gelijk is aan de verwachte waarde van het project minus het zekerheidsequivalent in formule:

$$RP = E(r) - ZE \qquad (6.2)$$

waarbij RP := risicopremie
E(r) := de verwachte waarde van het project
ZE := het zekerheidseauivalent .

Deze risicopremie wordt de Markowitz-risicopremie genoemd.
Uit de definitie van het zekerheidsequivalent volgt dat het nut van het zekerheidsequivalent gelijk is aan het verwacht nut van één of andere beslissing; immers, de projecten liggen op dezelfde indifferentiecurve, maar dan volgt uit formule (6.2) dat:

$$U(ZE) = E\,[U(r)] = U\,[E(r) - RP] \qquad (6.3)$$

In het hierna volgende zullen wij een maatstaf voor risico-aversie afleiden die ontleend is aan Pratt[12)].
Uitgangspunt is formule (6.3) waarop wij - zowel bij het linker- als rechterlid - de Taylorreeks zullen loslaten met h = E(r).
Dit geeft het volgende:

$$U(r) = U\,[E(r)] + U^{(1)}\,[E(r)](r-Er) + U^{(2)}[E(r)]\frac{(r-Er)^2}{2} + \ldots \qquad (6.4)$$

$$\Rightarrow E\,[U(r)] = U\,[E(r)] + U^{(2)}[E(r)]\frac{\sigma^2(r)}{2} + \ldots \qquad (6.5)$$

$$U\,[E(r)-RP] = U\,[E(r)] - U^{(1)}[E(r)]RP + U^{(2)}[E(r)]\frac{(-RP)^2}{2} + \ldots \qquad (6.6)$$

Gelijkstellen van formules (6.5) en (6.6), hetgeen gerechtvaardigd is door formule (6.3), geeft:

$$U^{(2)}[E(r)]\frac{\sigma^2(r)}{2} + \ldots = -U^{(1)}[E(r)]RP + \frac{(RP)^2}{2} U^{(2)}[E(r)] + \ldots \tag{6.7}$$

$$\Rightarrow \; RP = \frac{-U^{(2)}[E(r)]}{U^{(1)}[E(r)]} \cdot \frac{\sigma^2(r)}{2} + \text{andere termen}^{*)} \tag{6.8}$$

Voòr rendementen waarvoor de centrale momenten relatief klein zijn ten opzichte van de verwachtingswaarde kunnen wij nu de risicopremie definiëren met behulp van de eerste en tweede afgeleide van de nutsfunctie.
Wij zullen dit de absolute risicopremie noemen, in formule:

$$ARP = \frac{-U^{(2)}(r)}{U^{(1)}(r)} \tag{6.9}$$

waarbij:

ARP := absolute risicopremie .

Tevens definiëren wij de relatieve risicopremie

$$RRP = -r\frac{U^{(2)}(r)}{U^{(1)}(r)} \tag{6.10}$$

waarbij:

RRP := relatieve risicopremie .

Deze laatste maatstaf meet de graad van risico-aversie, gemeten als een proportie van het rendement van het project.

In de hieronderstaande tabel zijn de absolute en relatieve risico-aversie voor een drietal nutsfuncties à la Pratt weergegeven.

nutsfunctie	ARP	RRP
$U(r) = a + br + cr^2$	$-2c/(b + 2cr)$	$-2cr/(b + 2cr)$
$U(r) = \sqrt{r}$	$0{,}5/r$	$0{,}5$
$U(r) = \log r$	$1/r$	1

*) De afleiding vond plaats in het punt $E(r)$; formule (6.9) geeft de algemene uitdrukking voor de absolute risico-aversie, gemeten in punt r.

6.2 Interpretatie van de ARP en RRP

Tot nu toe hebben wij de nutsfunctie beschouwd als functie van de rendementen, waarbij:

$$r = \frac{W - A}{A} = \frac{W}{A} - 1 \tag{6.11}$$

met

$A :=$ het beginvermogen

$W :=$ het vermogen aan het einde van de periode .

In het hieronderstaande zullen wij de nutsfunctie beschouwen met als variabele het vermogen W aan het einde van de periode. De reden hiertoe is gelegen in de interpretaties die men dan aan de ARP en RRP kan toekennen.

Wij willen de lezer er op attent maken, dat rendement gerelateerd is aan het beginvermogen en niet als absolute winst beschouwd wordt. Met andere woorden: de beslisser beschouwt telkens zijn relatieve toename in zijn vermogen.
In de literatuur is op dit punt veel verwarring. Wij geven een voorbeeld: als een investeringsproject 1.000 gulden opbrengt, de uitgave hiervan 400 gulden bedraagt en de beslisser bezit 2.000 gulden , dan is het rendement 130% en <u>niet</u> 150% .

Ook wordt wel gezegd dat utiliteitsanalyse niet verstoord wordt (door de transformatie van W in r), omdat er sprake is van een positieve monotone transformatie (zie bijv. (13)).
Het eerste is waar, omdat er sprake van een één-één relatie tussen W en r. Het argument echter is niet van toepassing omdat positieve monotone transformatie slaat op de utiliteitswaarde zelf, dus $U(r)$ geeft dezelfde rangordening als $a + b\,U(r)$ met $b > 0$.
Dit laatste is eenvoudig in te zien.

Laat $\quad U^*(x) = a + b\,U^*(x)$

$\qquad\quad U^*(y) = a + b\,U^*(y)$

Te bewijzen $E\,U(x) > E\,U(y) \Rightarrow E\,U^*(x) > E\,U^*(y)$.

<u>Bewijs</u> : $\quad E\,U^*(x) = \sum_{i=1}^{n} P_i\,U^*(x_i) =$

$$= \sum_{i=1}^{n} P_i\,[a + b\,U^*(x_i)] = a + b\,E\,U(x) \;.$$

en zo ook: $E\,U^*(y) = a + b\,E\,U(y)$

waaruit volgt:

als $b > 0$ en $E\,U(x) > E\,U(y)$, dan $E\,U^*(x) > E\,U^*(y)$.

Wij keren nu terug naar het oorspronkelijke probleem.
Laat A het beginvermogen van een individu zijn[14].
Wanneer een risico-averse beslisser geconfronteerd wordt met een weddenschap met inzet h en met kans $p = \frac{1}{2}$ op een winst h in het vooruitzicht, dan zal de risico-averse beslisser deze weddenschap niet aangaan.

De acceptatie hangt af van h ten opzichte van A en van p .
Volgens het continuïteitsaxioma is er nu een kans $p(A, h)$, zodat deze beslisser indifferent is tussen het doen van de weddenschap en het nalaten daarvan. De verwachte utiliteitstheorie impliceert dan dat:

$$U(A) = p(A,h)\,U(A+h) + (1-p(A,h))\,U(A-h) \tag{6.12}$$

De Taylorreeks toegepast op $U(A+h)$ geeft:

$$U(A+h) = U(A) + h\,U'(A) + h^2/2\,U''(A) + R_1 \tag{6.13}$$

waarbij

$$R_1 / h^2 \to 0 \quad \text{als} \quad h \to 0 \quad .$$

Zo ook:

$$U(A-h) = U(A) - h\,U'(A) + h^2/2\,U''(A) + R_2 \tag{6.14}$$

waarbij

$$R_2 / h^2 \to 0 \quad \text{als} \quad h \to 0 \quad .$$

Ingevuld in (6.12) geeft dit:

$$\begin{aligned} U(A) &= p(A,h)\,\{U(A) + h\,U'(A) + \frac{h^2}{2}\,U''(A) + R_1\} + \\ &\quad + (1-p(A,h))\,\{U(A) - h\,U'(A) + \frac{h^2}{2}\,U''(A) + R_2\} = \\ &= U(A) + (2p(A,h) - 1)\,h\,U'(A) + \frac{h^2}{2}\,U''(A) + R \end{aligned} \tag{6.15}$$

met

$$R = p(A,h)\,R_1 + (1 - p(A,h))\,R_2$$

en dus $R/h^2 \to 0$ als $h \to 0$.

Uit vergelijking (6.15) volgt nu:

$$p(A,h) = \frac{1}{2} + \frac{h}{4} \cdot \frac{U''(A)}{U'(A)} - \frac{R}{2h\,U'(A)}$$

ofwel

$$\boxed{p(A,h) = \tfrac{1}{2} + \frac{ARP}{4}.h + \text{termen van hogere orde in } h} \qquad (6.16)$$

Wij zien dus dat de absolute risicopremie een benadering vormt voor de marginale kans boven een $\frac{1}{2}$ die een risico-averse persoon moet worden gegeven om indifferent te zijn tussen het aangaan en het nalaten van de weddenschap.

Op analoge wijze is af te leiden dat:

$$p(A, f_A . A) = \tfrac{1}{2} + \frac{RRP}{4} f_A + \text{termen van hogere orde in } f_A \qquad (6.17)$$

waarbij

f_A := de fractie van het vermogen dat verdiend wordt.

Verloop van de ARP en RRP

Er wordt meestal verondersteld dat:

1) ARP een dalende functie van A is.

2) RRP een stijgende functie van A is.

Ondersteuning van de eerste hypothese vinden wij in vergelijking (6.16). Immers, wij mogen veronderstellen dat - naarmate iemand rijker wordt - de bereidheid om aan een weddenschap deel te nemen met vaste omvang h zal stijgen. De hypothese dat de relatieve risicopremie stijgt naarmate A stijgt, ligt niet voor de hand.
De gedachtegang hierbij is dat, als zowel het vermogen en de grootte van de inzet van de weddenschap in dezelfde mate toenemen, de bereidheid zal afnemen.

6.3 Het nut van de ARP en RRP

De vraag rijst: " Kunnen de ARP en RRP als instrument binnen de utiliteitstheorie ons inzicht doen verbeteren?"
Een argument is de volgende:
Daar de ARP een dalend verloop heeft, kunnen wij nutsfuncties die een stijgende ARP hebben, buitensluiten voor verdere analyse.
Voorbeeld:
Dalend verloop van de ARP wil zeggen, dat:

$$\frac{d\ ARP}{d\ A} = \frac{-U'''(W).U'(W) + (U''(W))^2}{(U'(W))^2} < 0 \ .$$

Uit de tabel op pag. 23 blijkt nu dat de ARP van de kwadratische nutsfunctie een stijgend verloop heeft. (Wij hebben dit probleem al in de vorige paragraaf geconstateerd.)

Wij kunnen dit ook op een andere wijze benaderen.
Veronderstel, dat een risico-averse belegger met huidig vermogen A kan beleggen in risicodragende titels met rendement r (stochast) en in risicovrije titels met zekere opbrengstvoet i (discreet). Dan geldt dat na één periode W gelijk is aan:

$$W = (A-a)(1+i) + a.(1+r) = A(1+i) + a(r-i) \qquad (6.18)$$

waarbij

$a :=$ het bedrag belegd in risicodragende titels.

Wij zullen nu laten zien dat als een belegger een kwadratische nutsfunctie heeft a nadert tot 0 als A stijgt.
<u>Bewijs</u>:

$$\text{Zij} \quad U(w) = bw + cw^2$$

De belegger zal a zo kiezen, dat hij zijn verwacht nut maximaliseert, dus: $\max E\,[U(w)]$.

Stel $E\,[U(w)]' = 0 \Rightarrow E\,[U'(w)] = 0$

ofwel

$$\frac{\delta\, U'(w)}{\delta\, a} = \frac{\delta\, U'(w)}{\delta\, w} \cdot \frac{\delta\, w}{\delta\, a} = 0$$

$$\Rightarrow [(b + 2cw)r] = 0 \iff E\,[(b + 2c\{A(1+i) + a(r-i)\})(r-i)] = 0$$

$$\iff b\,E\,r + 2c\,A(1+i)\,E\,r + 2c\,E\,a(r-i)^2 = 0$$

$$\iff a = \frac{[d - A(1+i)]\,E\,r}{E(r-i)^2} \qquad (6.19)$$

met $d = \frac{-b}{2c} > 0$.

Daar $E\,r > 0$ (anders is $a = 0$) zien wij duidelijk dat als $A(1+i)$ nadert tot d, dan nadert a tot 0.

Deze eigenschap geldt altijd voor een stijgende ARP. Wij zullen dit in het hieronderstaande aantonen.

<u>*Stelling:*</u> *Laat A, r, i, a als hierboven gedefinieerd en neem aan, dat de ARP als functie van A een stijgend verloop heeft, dan geldt:*
beleggingen in risicodragende titels zullen afnemen, naarmate een belegger rijker wordt.

<u>Bewijs:</u>

Een individu dat handelt volgens de verwachte nuthypothese zal een bedrag a beleggen, zodanig dat de verwachting van U(W) maximaal is gegeven i en de kansverdeling van r . Dit is het geval als:

$$\frac{\delta\, E\, [U'(W)]}{\delta\, a} = 0 \qquad \text{en} \qquad \frac{\delta^2\, E\, [U(W)]}{\delta\, a^2} < 0\ . \tag{6.20}$$

Er geldt volgens de kettingregel en de eigenschappen van verwachtingswaarden dat:

$$\frac{\delta\, E\, [U(W)]}{\delta\, a} = E \left[\frac{\delta U}{\delta W}\ \frac{\delta W}{\delta a}\right]$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\delta\, E\, [U(W)]}{\delta\, a} = E\ \ U'(W)(r-i) \tag{6.21}$$

en

$$\frac{\delta^2\, E\, [U(W)]}{\delta\, a^2} = E\, [U''(W)(r-i)^2] \tag{6.22}$$

Daar $(r-i)^2 \geq 0$ en $U''(W) < 0$ voor alle W geldt dat

$$E\, [U''(W)(r-i)^2] < 0 \tag{6.23}$$

zodat er een a is waarvoor $E\, [U(W)]$ een maximum aanneemt.

Wij beschouwen nu hoe de optimale waarde a verandert als A verandert. Noem $E\, [U(W)] = f(a)$. Uit (6.20) volgt dan:

$$d\, f'(a) = d\, 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\delta\, f'(a)}{\delta\, a}\, d\, a + \frac{\delta\, f'(a)}{\delta\, A}\, d\, A = 0 \quad \Longleftrightarrow$$

$$\frac{d\, a}{d\, A} = \frac{-\delta\, f'(a)/\delta\, A}{\delta\, f'(a)/\delta\, a}\ .$$

Daar $\dfrac{\delta\, f'(a)}{\delta\, A} = E\left[\dfrac{\delta\, \{U'(W)(r-i)\}}{\delta\, W}\ \dfrac{\delta\, W}{\delta\, A}\right]$

geldt dat: $\dfrac{\delta\, f'(a)}{\delta\, A} = E\left[U''(W)(r-i)^2(1+i)\right]$

en dus $\frac{da}{dA} = \frac{-E\,[U''(W)(r-i)(1+i)]}{E\,[U''(W)(r-i)^2]}$. (6.24)

De stelling is dan bewezen als wij kunnen bewijzen, dat stijgende ARP impliceert dat de teller groter dan nul is. (De noemer is altijd negatief, zie (6.23)).

1) Als $r \geq i$ (voor alle r),
dan zal $A(1+i) \leq W$. Er geldt dan per definitie dat:

$$ARP\,[W] \geq ARP\,[A(1+i)] \quad \Longleftrightarrow$$

$$\frac{-U''(W)}{U'(W)} \geq ARP\,[A(1+i)] \quad \Longleftrightarrow$$

$$U''(W) \leq -ARP\,[A(1+i)]\,U'(W) \quad .$$

Vermenigvuldig nu het linker- en het rechterlid met $(r-i)(1+i) \geq 0$, dan verkrijgen wij:

$$U''(W)(r-i)(1+i) \leq -ARP\,[A(1+i)]\,U'(W)(r-i)(1+i) \quad . \qquad (6.25)$$

2) Als $r \leq i$
dan zal $A(1+i)$ _ W , zodat

$$ARP\,[W] \leq ARP\,[A(1+i)] \quad \Longleftrightarrow$$

$$\frac{-U''(W)}{U'(W)} \leq ARP\,[A(1+i)] \quad \Longleftrightarrow$$

$$U''(W) > -ARP\,[A(1+i)]\,U'(W) \quad .$$

Vermenigvuldig ook hier het rechter- en linkerlid met $(r-i)(1+i) \leq 0$, dan is:

$$U''(W)(r-i)(1+i) \leq -ARP\,[A(1+i)]\,U''(W)(r-i)(1+i) \quad . \qquad (6.26)$$

Dus vergelijking (6.26) geldt voor alle i!
Neem de verwachting, dan geldt:

$$E\,[U''(W)(r-i)(1+i)] \leq -ARP\,[A(1+i)](1+i)\,E\,[U'(W)(r-i)] \quad .$$

Daar $E\,[U'(W)(r-i)] = 0$ (optimaliteitsvoorwaarde)
geldt:

$E\,[U''(W)(r-i)(1+i)] \leq 0$ als de ARP stijgend is en dus

$\frac{da}{dA} < 0$, waarmee het gestelde bewezen is.

Omgekeerd kunnen wij nu ook bewijzen dat als de ARP daalt de belegger meer en meer bereid is om in risicodragende titels te beleggen als deze rijker wordt.

De RRP heeft theoretisch belangrijke implicaties. Wij zullen dit in het hieronderstaande aantonen:

Laat M een getal zijn, zodat de

$$RRP\,[A] \leq M \qquad \text{voor alle} \quad A \geq A_0 \; .$$

$$\Rightarrow \frac{U''(A)}{U'(A)} \geq -\frac{M}{A} \; .$$

Neem nu links en rechts de integraal van A_0 tot A, dan krijgen wij:

$$\int_{A_0}^{A} \frac{U''(Y)}{U'(Y)}\,dY \geq -M\int_{A_0}^{A} \frac{1}{Y}\,dY \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log U'(A) - \log U'(A_0) \geq -M\,(\log A - \log A_0)$$

$$\Rightarrow U'(A) \geq U'(A_0)\,A_0^M\,A^{-M} \qquad \text{met} \quad A \geq A_0 \; .$$

Laat $C = U'(A_0)\,A_0^M \geq 0$

$$\Rightarrow \int_{A_0}^{A} U'(Y)\,dY \geq \int_{A_0}^{A} C\,Y^{-M}\,dY \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} U(A) \geq U(A_0) + [C/1-M][A^{1-M} - A_0^{1-M}] & \text{als} \quad R \neq 1 \\ U(A) \geq U(A_0) + C\,[\log A - \log A_0] & \text{als} \quad R = 1 \end{cases}$$

Uitgaande van een begrensde nutsfunctie zien wij dat, als $R < 1$ of $R = 1$ en $A \to \infty$ dat $U(A) \to \infty$, hetgeen in tegenspraak is met de veronderstelling, zodat $RRP > 1$ voor $A \geq A_0$.
Dus RRP kan niet convergeren naar een getal kleiner dan 1 .
Op analoge wijze kan men bewijzen, dat als de nutsfunctie begrensd is naar beneden en $A \to 0$, dan is de $RRP < 1$.

Wij mogen dus concluderen dat voor kleine waarden van A de RRP om en nabij 1 moet liggen en voor grote waarden wat hoger.
Als wij de RRP constant veronderstellen, dan lijkt 1 een redelijke veronderstelling; een nutsfunctie met een RRP van 1 is de logaritmische nutsfunctie zoals blijkt uit de tabel op pag. 23.

6.4 Een vergelijk

In deze paragraaf willen wij een vergelijk maken tussen de Markowitz-risicopremie, zoals gedefinieerd in paragraaf 6.1 en de benadering die door Pratt is gegeven:

$$RP_{(Pratt)} = -\tfrac{1}{2}\sigma^2 \frac{U''(W)}{U'(W)} .$$

Beschouw een individu met $A = 20.000$ en $U(W) = \log W$.

Het individu kan nu deelnemen aan:

a) 50/50% kans op het winnen of verliezen van 10

b) 80% kans op een verlies van 1.000
   20% kans op een winst van 10.000

ad a)
$$\sigma^2 = \Sigma\, p_i\, (W_i - E\, W_i) =$$
$$= \tfrac{1}{2}(20.010 - 20.000)^2 + \tfrac{1}{2}(19.990 - 20.000)^2 = 100$$

$$U'(W) = \frac{1}{W} \quad \text{en} \quad U''(W) = \frac{-1}{W^2} ,$$

zodat

$$RP_{(Pratt)} = -\frac{100}{2}\left(-\frac{1}{20.000}\right) = 0{,}0025$$

$$E\, U(W) = \Sigma\, p_i\, U(W_i) =$$
$$= \tfrac{1}{2}\, U(20.010) + \tfrac{1}{2}\,(19.990) = 9.903487428$$

$$ZE = e^{E[U(W)]} = 19.999{,}9974998$$

$$\Rightarrow RP = 0{,}0025002 .$$

De risicopremies zijn in dit geval haast gelijk.

ad b)
$$E(W) = 21.600$$
$$\sigma^2 = 19.520.000$$

Dus $RP_{(Pratt)} = 488$

$$E\, U(W) = 9{,}943545939$$
$$E\, W - Z\, E = 782{,}56$$

Hier is het verschil aanmerkelijk groter. Dit komt door de veronderstelling dat de termen van orde hoger dan 3 relatief klein zijn.

Conclusie: Als risicopremie is de Markowitz-risicopremie superieur, echter, de risicopremie à la Pratt is eerder bedoeld als interpretatie van de afgeleide grootheden ARP en RRP, welke beiden van grote betekenis zijn voor het denken binnen het denkraam van de utiliteitstheorie.

§ 7. Meerperioden Utiliteit

Tot dusver was de lengte van de beslissingshorizon 1 periode. Deze periode werd bepaald door de duur van een project of reeks projecten met dezelfde looptijd.
Binnen het één-periode model zijn de rendementen bekend (althans de verdeling van die rendementen). Voor meerdere perioden zijn er meerdere onzekere variabelen. Zo weet men bijvoorbeeld niet het rendement op een risicovrije titel. Tevens zal de verdeling van de rendementen op risicodragende titels moeilijker te bepalen zijn, naarmate de tijd verstrijkt.
Willen wij de meer-perioden utiliteiten nader beschouwen, dan zullen wij twee soorten modellen in de tijd moeten onderscheiden en wel:

1. perpetuïteiten
2. een eindig aantal perioden.

Hiernaast moeten wij veronderstellingen maken over het rendement in de toekomst. Men kan tot de volgende indeling komen:

1. de rendementen zijn bekend en zijn constant in de tijd
2. de rendementen zijn bekend en variëren in de tijd
3. de rendementen volgen een bepaalde verdeling die zich van periode tot periode herhaalt
4. de rendementen volgen een bepaalde verdeling, doch de verdeling in periode (n+1) is niet dezelfde als in periode n, maar is wel afhankelijk van de verdeling in periode n (en eventueel van de perioden daarvoor)
5. de rendementen volgen een bepaalde verdeling, maar de verdeling per periode verschilt totaal
6. de rendementen zijn verdelingsvrij.

Vervolgens moeten wij veronderstellingen maken omtrent de hoeveelheid die per periode wordt herbelegd en geconsumeerd. Dit geldt voor n perioden, dus n veronderstellingen.
In deze beschouwing zijn er 12 submodellen in de meer-perioden analyse met (n+2) veronderstellingen te onderscheiden.

Veronderstellen wij dat ook hier het verwacht nut van het eindvermogen wordt gemaximaliseerd, dan onderscheiden wij 12 submodellen met (n+3) veronderstellingen, waarbij de laatste veronderstelling een gemeenschappelijke is in alle submodellen.
In formule:

$$\max E\,[U(W_T)] \tag{7.1}$$

waarbij: W_T := het eindvermogen aan het einde van periode T .

De modellen die tot nu toe in de literatuur worden beschreven zijn fragmentarisch van aard. Dit is echter wel noodzakelijk om tot een 'antwoord' op de probleemstelling te komen. Volledigheidshalve is de meer-perioden utiliteit opgevoerd. Wij zullen er in deze memorandum niet verder op ingaan. Wel zal te zijner tijd een aparte publicatie aan dit onderwerp worden gewijd.

§ 8. Nut in de praktijk

In de voorafgaande paragrafen hebben wij beschreven hoe de nutsfunctie van een individu er uit zou kunnen zien en hoe hij op grond hiervan zijn investeringsbeslissingen zou moeten nemen. Duidelijk is hierbij gebleken, dat het opstellen van een nutsfunctie een strikt persoonlijke zaak is. Zelfs kan de nutsfunctie van één en dezelfde persoon van dag tot dag verschillen, doordat bijvoorbeeld zijn gemoedstoestand is veranderd. Bovendien schrijft niemand zijn nutsfunctie voor zichzelf expliciet op, wanneer hij een beslissing moet nemen. Men weegt verschillende projecten wel tegen elkaar af, waarbij men dan als het ware een nutsfunctie in het achterhoofd heeft.

We hebben al geconstateerd, dat het opstellen van de nutsfunctie van een individu geen eenvoudige zaak is. Hoeveel moeilijker zal dit dan nog wel worden voor een groep van beslissers, waarmee we in de praktijk veel vaker te maken hebben. Immers, investeringsbeslissingen worden veelal door een groep van beslissers genomen. Daarbij dient rekening te worden gehouden met ieders wensen.
De vraag rijst dan: "Kan er wel een nutsfunctie voor die groep worden opgesteld?"

Het is duidelijk dat niet zomaar de afzonderlijke nutsfuncties kunnen worden opgeteld. In feite zou men precies hetzelfde moeten handelen als bij een individu en de groep bepaalde voorkeuren moeten laten uitspreken. De gevonden nutsfunctie hangt uiteindelijk af van de persoonlijke voorkeuren, maar ook van het gewicht dat de afzonderlijke beslissers in de schaal leggen.

Het resultaat kan zijn dat niemand tevreden is. Dit is echter geen tekortkoming van de nutstheorie, maar eerder een gevolg van de wijze waarop beslissingen moeten worden genomen.

§ 9. Conclusies

1. In de huidige literatuur houden auteurs bij het poneren van nutsfuncties, zoals o.a. de wortel en logaritmische en de lineaire nutsfuncties geen rekening met de St. Petersburg-paradox; immers deze nutsfuncties zijn niet begrensd.
   Een functie die wel begrensd is, is bijvoorbeeld de nutsfunctie:

   $$U(r) = a - e^{-br} \qquad \text{met } a \text{ en } b \text{ constanten.}$$

   Hiervan is $U'(r) = b\,e^{-br} > 0$ en

   $$U''(r) = -b^2\,e^{-br} < 0 \; .$$

   Tevens geldt dat $\lim\limits_{r\to\infty} U(r) = a$ is eindig.

2. Begrensdheid van de nutsfuncties impliceert dat de individu een risico-averse persoon <u>moet</u> zijn.
   Is dit niet het geval, dan blijft $U'(r) > \varepsilon$ met $\varepsilon > 0$, zodat een oneindig aantal intervalletjes het bereik van de nutsfunctie met oneindig doet toenemen, hetgeen een tegenspraak is.

3. Het opstellen van een nutsfunctie is niet eenvoudig en kan gepaard gaan met de nodige inconsistenties. Het beroemde voorbeeld is de Allais-paradox. Andere paradoxen zijn o.a. geconstrueerd door Ellsberg[15)] en Becker[16)].

4. Het is mogelijk met behulp van het theorema van Taylor los van de axiomata van Von Neumann & Morgenstern aan te tonen, dat $E\,U(r)$ een superieure maatstaf is als criterium in het beslissingsproces onder onzekerheid.

5. Een kwadratische nutsfunctie heeft een ARP welke stijgt als het vermogen stijgt bij gegeven coëfficiënten; dit is intuïtief niet aannemelijk.
   Het is echter evenmin aannemelijk dat deze coëfficiënten eenzelfde waarde behouden bij 'hoger' vermogen.
   Een mogelijke redding is het volgende: beschouw de kwadratische nutsfunctie:

   $$U(W) = bW + cW^2 \; .$$

Intuïtief gezien geeft de coëfficiënt b de mate van de preferentie voor de rendementen weer en de coëfficiënt c de graad van risico-aversie.
We zouden nu de coëfficiënt c kunnen laten afhangen van het beginvermogen A, zodanig dat als A stijgt dat c daalt.
Een voorbeeld hiervan is:

$$U(W) = bW + \frac{c'}{A} W^2 \qquad \text{met } c = \frac{c'}{A} .$$

Nu geldt dat:

$$ARP = \frac{-2c}{b + 2cW} = \frac{-2c'/A}{b + \frac{2c}{A} . W} .$$

Als $W = A$, dan:

$$ARP = \frac{-2c'/A}{b + 2c} ,$$

zodat de ARP daalt als A stijgt.

Een nadeel van deze benadering is echter dat $\frac{-b}{2c'} = \frac{-b}{2cA}$ kleiner wordt en het domein van mogelijke waarden van het vermogen nog meer afneemt.

Zoals wij in paragraaf 5 zagen wordt in de portefeuille vaak verondersteld dat de rendementen normaal verdeeld zijn. Dit betekent dat de verdeling gekarakteriseerd wordt door $E\,r$ en $\sigma^2(r)$.
Daar het verwacht nut - in geval men een kwadratische nutsfunctie heeft - ook beschreven kan worden door deze twee parameters, ligt het voor de hand om aan een belegger een kwadratische nutsfunctie toe te kennen.
Het probleem is nu, dat - in geval men normaliteit veronderstelt - de rendementen van $-\infty$ tot ∞ kunnen variëren, terwijl de rendementen van een belegger met een kwadratische nutsfunctie niet groter mogen zijn dan $\frac{-b}{2c}$.

Wil men dit vermijden, dan zal men c naar nul moeten laten tenderen, maar dan gaat de functie meer op een lineaire nutscurve lijken, zodat wij mogen concluderen dat de kwadratische nutsfunctie maar een schamele beschrijving geeft voor een risico-averse individu, ingeval de rendementen normaal verdeeld zijn.

6. Uit formule (3.18) zien wij dat de derde afgeleide $U'''(r)$ aangeeft een persoons houding ten aanzien van scheefheid. Een positieve waarde van $U'''(r)$ geeft dan een voorkeurs-preferentie aan ten aanzien van positieve scheefheid.

7. Om een implicatie van de RRP te geven hebben wij verondersteld dat de RRP $<$ M is.
Verder onderzoek dient gedaan te worden als dit niet het geval kan zijn; dus als de RRP $\to \infty$, wanneer $A \to \infty$.
Een voorbeeld van een nutsfunctie die deze eigenschap bezit is:

$$U(W) = a - e^{-bW} .$$

8. Bij het beslissingsproces in meerdere perioden blijkt dat wij zeer vele veronderstellingen moeten doen willen wij nog enige 'zinnige' kwantitatieve uitspraken kunnen maken.
De vraag is dan, of wij adequaat het beslissingsproces kunnen beschrijven met behulp van de gedragshypothese die alleen gebaseerd is op het verwachte nutcriterium.

9. Wij zijn ingegaan op het onzekerheidsvraagstuk, waarbij wij veronderstelden dat de kansverdeling van rendementen gegeven was.
Verder onderzoek moet nog worden gedaan in geval wij met subjectieve waarschijnlijkheden te maken hebben en op een niveau lager, waarbij wij zowel de rendementen als de kansen niet weten.

Noten

1. Daniel Bernoulli, a member of the famous Swiss family of distinguished mathematicians, was born in Groningen, January 29, 1700, and died in Basle, March 17, 1782.
He studied mathematics and medical sciences at the University of Basle. In 1725 he accepted an invitation to the newly established academy in Petersburg, but returned to Basle in 1733, where he was appointed professor of physics and philosophy. Bernoulli was a member of the academies of Paris, Berlin and Petersburg and the Royal Academy in London. He was the first to apply mathematical analysis to the problem of the movement of liquid bodies.
(Uit: The Theory of Business Finance: A Book of Readings, 1967, pag. 22, van Archer & d'Ambrosio.)

2. Karl Menger, " Das Unsicherheitsmoment in der Wertlehre", Zeitschrift für Nationalökonomie 51, 1934.

3. In de literatuur wordt het nut niet altijd tussen 0 en 1 afgebeeld. Echter de preferentie-rangschikking van een nutsfunctie is invariant onder positieve monotone transformatie van de nutsfunctie.
Dus elke nutsfunctie valt, zonder de preferentie-rangorde geweld aan te doen, te transformeren in een nutsfunctie met als uiterste waarden 0 en 1. Zie ook paragraaf 6.2

4. voorbeeld

Stel, een aantal projecten heeft als uiterste mogelijkheden een verlies van 1.000 en een winst van 1.000.
Om dan te kijken wat het nut is voor iemand van een winst van 600 laat men de persoon die p vaststellen, zodanig dat hij indifferent is tussen de zekere opbrengst van 600 en het kansspel met kans p op 1.000 en (1-p) op -1.000.
Zeg p= 0,8 dan is het nut van deze persoon van 600 gelijk aan 0,8. Voor een mogelijk verlies van 250 blijkt bij deze risico-averse persoon het nut bijvoorbeeld $\frac{1}{2}$ te zijn.
Dit wil zeggen de beslisser in ons voorbeeld betaalt net zo lief 250 als dat hij het project met kansen $\frac{1}{2}$ op winnen of verliezen van 1.000 aangaat.

5. Allais, M.
Le comportement de l'homme rationnel devant le risque : critique des postulats et axioms de l'école américaine.
Econometrica 1953 no. 4

6. Vaak is de wijze waarop kansen worden gegenereerd ook van belang. Zo prefereren sommigen bingo boven black-jack ondanks dat de kansen gelijk zijn.

7. Markowitz, H.
Portfolio selection : efficient diversification of investments, 2e druk, Yale University Press.

8. Allais, M. en Hagen, O.
Expected utility hypothesis and the Allais paradox, Reidel, Dordrecht 1979.

9. Voorbeelden:

1. Stel $f(x) = e^x$ en kies $h = 0$. Dan geldt:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!}$$

2. Stel $f(x) = \sin x$ en kies weer $h = 0$. Dan geldt:

$$\sin x = \sin(0) + \cos(0)\frac{x}{1} - \sin(0)\frac{x^2}{2} - \cos(0)\frac{x^3}{3!} +$$

$$+ \sin(0)\frac{x^4}{4!} + \cos(0)\frac{x^5}{5!} - \sin(0)\frac{x^6}{6!} - \cos(0)\frac{x^7}{7!} + \ldots =$$

$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

10. De axioma's die hier geformuleerd zijn komen niet letterlijk overeen met de oorspronkelijke axioma's van Von Neumann en Morgenstern. Er zijn in de literatuur verschillende axioma's catalogi ontwikkelt met dezelfde implicaties. Doch de hier gekozen axioma's achten wij het gemakkelijkst toegankelijk voor de lezer.

11. Bevestiging van deze veronderstelling zien wij onder andere in :
Blume, M.E.
Portfolio theory : A step toward its practical applications
J. Portf. Managm. 1970.

Fama, E.F.
Foundations of Finance Hoofdstukken 1 en 2
Basic book, New York 1976.

12. Pratt, J.E.
Risk aversion in the small and the large,
Econometrica, January 1964.

13. Francis, J.C. en Archer S.H.
Portfolio analysis.
2e druk, New Yersey.

14. Het hieronderstaande is ontleend aan Arrow, K.J.
Aspect of the theory of Risk-Bearing
YRJÖ JAHNSSONIN SÄÄTIÖ, Helsinki.

15. Ellsberg, D.
Risk ambiguity and the Savage axioma's
Quarterly journal of economics, 1961.

16. Becker, DeGroot en Marshak
An experimental study of some stochastic models for wagers,
Behavioural Science nr. 8, 1963.